322

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

ISEM-V

MEMORIAS

I SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (I SEM-V) "EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN TIEMPOS DE PANDEMIA"

TOMO I
CONFERENCIAS

AGOSTO'2020

ÍNDICE

TOMO I – Conferencias

El desarrollo de la Didáctica de la Matemática
Relaciones entre EOS y otras teorías

Martha Isabel FANDIÑO PINILLA
NRD c/o Departamento de Matemática
Universidad de Bologna, Italia

Resumen

Se describen algunos rasgos característicos desde el punto de vista ontológico y semiótico como una base constitutiva de la Didáctica de la Matemática. Finalmente se hace referencia a otros marcos teóricos y sus conexiones con el enfoque ontosemiótico.

Palabras Clave: Bases de la Didáctica de la Matemática. Bases del EOS. Relaciones entre Teorías. Didáctica de la Matemática como Ciencia.

[3]**Nota**

[3] Este artículo hace referencia, analiza y profundiza trabajos previos, en particular: D'Amore (2000, 2001a, 2001b, 2005, 2007); D'Amore, Fandiño Pinilla (2001, 2013, 2020); D'Amore, Font, Godino (2007); D'Amore, Godino (2006, 2007); Font, Godino, D'Amore (2007).

Interpretación de las bases constitutivas de la DdM desde los puntos de vista Ontológico y Semiótico

Las aplicaciones de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática nos llevan a una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, ...) (D'Amore, &Godino, 2006). Según esta posición filosófica, las nociones y las estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente del ser humano y de sus actividades, privadas o sociales, en algún dominio real. El conocimiento matemático consiste en *descubrir* relaciones pre-existentes que relacionan entre sí dichos objetos.
Dicha concepción implica además una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido que es considerado como un sistema de verdades seguras, ciertas e inmutables. Con este presupuesto, por ejemplo, el significado del término "función" coincide con el concepto de función delineado, explicitado, externalizado por una oportuna y "correcta" definición matemática.
Desde un punto de vista epistemológico, la definición pragmatista del significado

> es mucho más satisfaciente que no aquella dada al interior de la teoría realista: con la desaparición de los conceptos y de las proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo puedan ser conocidas estas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto al lenguaje (Kutschera, 1979; p. 148).

Desde nuestro punto de vista, los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de la matemática (Ernest, 1991) implican, entre otras cosas, la adopción de las teorías pragmatistas del significado. Los objetos matemáticos deben/pueden ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades matemáticas que realizan grupos de personas y que, por tanto, evolucionan con el transcurrir del tiempo.
En nuestra concepción, lo que determina el emerger progresivo de los "objetos matemáticos" es el hecho de que, en el seno de ciertas instituciones, se realizan determinados tipos de prácticas y que el "significado" de dichos objetos está íntimamente relacionado con los problemas afrontados y con las actividades realizadas por los seres humanos, no pudiéndose reducir el significado del objeto matemático a su mera definición matemática. La definición sintetiza un significado que es debido a la actividad, no es *el* significado o su expresión unívoca.
Siguiendo lo dicho hasta ahora, tomemos en examen las consideraciones de Ullmann (1978) que abren el camino a las siguientes prospectivas: las posiciones realistas y pragmatistas no son contradictorias; por tanto, la posición antropológica no está en contradicción con la realista.
En Ullman las teorías realistas son llamadas "referenciales" mientras las pragmatistas son llamadas "operacionales o contextuales"; desde su punto de vista, las teorías pragmatistas son un complemento de las teorías realistas:

> El significado de una palabra se puede verificar *sólo* estudiando su uso [y aquí nos recuerda Wittgenstein]. No existe ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o algún otro método. El investigador debe, en primer lugar, organizar una muestra adecuada de contextos y afrontarlos con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez concluida esta fase, se puede pasar a la fase "referencial" y formular el significado o los significados evidenciados de esta forma. (Ullman, 1978, p. 76).

Puede ser iluminante en este punto citar la llamada "máxima pragmática" de Peirce: «Considerar cuáles son los efectos prácticos que nosotros pensamos puedan ser productos del objeto en nuestra concepción. La concepción de todos estos efectos es la concepción completa del Objeto» (Peirce, CP, 5.18, en Pierce, 1960). [Traducción nuestra].
Volvamos a Ullman:

> La relación entre los dos métodos o, mejor, entre las dos fases de la investigación, es, en definitiva, la misma que se tiene entre el idioma y su expresión oral: la teoría operacional trata del significado en el hablado; aquella referencial, del significado en el idioma. No existe, absolutamente, necesidad de colocar las dos formas de acceso en oposición, uno frente al otro: cada uno conduce a su propio lado del problema y ninguno está completo sin el otro. (Ullman, 1978, pp. 76-77)

Recogiendo esta significativa observación de Ullman, y volviendo al campo que nos interesa, creemos poder afirmar que el significado de los objetos matemáticos inicia como pragmatista, relativo al contexto; pero, entre los tipos de uso relativos a dicho significado, existen algunos que permiten orientar los procesos de enseñanza – aprendizaje de la matemática. En la Didáctica de la Matemática, estos tipos de usos se objetivan a través del lenguaje y terminan constituyendo referencias específicas del léxico institucional.
Lo aquí delineado es el punto de partida de una visión de la DdM que amplía el punto de vista antropológico, elimina los límites, se acerca a la "práctica" compartida en aula, supera la supuesta dicotomía entre realismo y pragmatismo, así como entre antropología y psicología.

Los marcos teóricos en DdM como desarrollo de diversas teorías

Una de las tareas de mayor urgencia e importancia que deben ser afrontadas por los investigadores en DdM, como habíamos sugerido precedentemente (en 1.), es la clarificación, la comparación y la articulación de los marcos teóricos que se están usando actualmente. El problema es urgente y crítico, dado que, nuestra disciplina está ligada a otras, como la epistemología, la psicología, la matemática, la semiótica etc., y se están usando instrumentos y presupuestos teóricos divergentes, cuya coherencia y utilidad no es de hecho obvia y no puede ser dada por descontada.
En el actual panorama de la DdM observamos un cierto absolutismo teórico (cerrado en sí mismo) y una desarticulación conceptual y metodológica. Este problema se observa no sólo entre paradigmas y escuelas de pensamiento lejano (pragmatismo, realismo, constructivismo, cognitivismo, etc.), sino incluso dentro de las teorías emergentes de nivel intermedio que comparten un mismo paradigma epistemológico de base.
Por ejemplo, en el caso de la TAD, ¿qué relaciones existen con la teoría de las situaciones de Brousseau, o con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, o con la teoría de la dialéctica instrumento – objeto de Douady? ¿Qué relaciones existen entre estas teorías y la teoría de los registros de representación semiótica de Duval? ¿O con la teoría APOS de Dubinsky? Etc.
Para poder hacer estas comparaciones y estas articulaciones es necesario construir un sistema de referencia global que permita situar cada una de las teorías en el panorama integral de la DdM. Es necesario tener presente simultáneamente las diferentes dimensiones implicadas en los problemas de enseñanza y de aprendizaje de la matemática (dimensión epistémica, cognitiva, instruccional, política, etc.) y de los diversos niveles de análisis.
El punto de vista ontosemiótico (EOS) nació alrededor del 1994 (Godino y Batanero, 1994) con el objetivo de iniciar este camino de reflexión meta-didáctica, partiendo de la constatación de algunos límites en el punto de vista antropológico que había iniciado a formular Chevallard (1991; 1992). En particular, se trató de rectificar la elección anti-psicológica inicial, que se consolidó en los trabajos sucesivos, y su divergencia de otras teorías precedentes, como la teoría de las situaciones o aquella de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990).
Pero no podemos olvidar el recorrido, el largo recorrido teórico de la DdM y de las teorías que decretaron su surgimiento y después la aceptación como teoría científica (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2013, 2020).
La teoría de las situaciones didácticas fue la primera en nacer; todos nosotros, investigadores en DdM, ya veteranos, fuimos fascinados por su forma de entender el aprendizaje; era la primera vez que los matemáticos hacían reflexiones de este tipo y en esta dirección.
Pero después la DdM evolucionó, y surgieron otras tantas teorías, inútil hacer una lista aquí: citaremos algunas líneas abajo. Muchas de estas teorías son evoluciones de la teoría de las situaciones, otras examinan cuestiones diferentes; algunas nacieron y murieron, otras se desarrollaron de forma impensable.
Las teorías nacen y mueren, se puede establecer un contraste entre ellas o buscar conexiones entre estas o incluso hacer que colimen incluyéndolas en otras teorías. Son muchos los estudios en esta dirección; nosotros nos limitamos reenviar a: Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello (2008), Radford (2008a; b; 2011), Bikner-Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue y Sabena (2010).
Pero las teorías nuevas nacen con objetivos bien precisos, no sólo para absorber o incluir las teorías precedentes, sino también para estudiar factores que a las precedentes se les escapaban o para estudiar hechos que a las precedentes no les interesaban (D'Amore, 2007).
Así, teorías construidas sucesivamente a la teoría de las situaciones tuvieron objetivos diversos, fueron bien aceptadas en el panorama de los investigadores internacionales, pero no sustituyen la teoría de situaciones porque estas nuevas teorías tienen objetivos diversos.
Por ejemplo, la teoría APOS (que describe cómo las Acciones se interiorizan en Procesos que después son encapsuladas como Objetos mentales, que toman su puesto en más sofisticados Esquemas cognitivos) (Tall, 1991), creada por Ed Dubisky en los años '80, tuvo un gran éxito internacional (y también grandes críticas), pero entre sus objetivos no estaba el de entender las situaciones de aula, como sí lo logra hacer la teoría de las situaciones (Dubinsky, 1991a, b).
Por ejemplo, el gran aparato introducido por Raymond Duval en 1993 para mostrar cómo las actividades de enseñanza – aprendizaje de la matemática en aula están fuertemente conexas con las tres acciones cognitivas

de representar, tratar, convertir típicas de la semiótica, trajo a nuestra disciplina excelentes resultados, pero nada tiene que ver con las descripciones que la teoría de las situaciones nos enseña a observar y reconocer (Duval, 1993,1995, 1998).[4]
Por ejemplo, la teoría EOS (Enfoque Onto Semiótico) tuvo un gran éxito internacionalmente desde cuando fue creada en los años '90 por uno de los grupos de investigación con sede en la Universidad de Granada, el grupo dirigido por Juan D. Godino; dicha teoría engloba en cierto sentido la llamada TAD (teoría antropológica de la didáctica) creada por Yves Chevallard en los primeros años '90, pero con objetivos declarados manifiestamente diversos de los objetivos perseguidos por la teoría de situaciones (Chevallard, 1991, 1992; D'Amore, & Godino, 2006; 2007; Font, Godino, & D'Amore, 2007), aún sin estar en antítesis y teniendo importantes puntos de comunión, como veremos en este mismo artículo.
Por ejemplo, la teoría semiótico cultural de Luis Radford tiene la capacidad de explicar modalidades de aprendizaje relacionadas con actividades semióticas por parte de estudiantes, por ejemplo, en el aprendizaje de la generalización o del álgebra precoz, que ninguna otra teoría precedente tiene. Pero no incluye el estudio general de las situaciones de aula, las cuales, dentro de esta teoría, son aceptadas como elementos normativos. Un análisis comparativo entre teoría de las situaciones y teoría de la objetivación se puede ver en Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori y Santi (2020).
Indudablemente se trata de una de las teorías que, más que ninguna otra, cambió nuestra actitud frente al aprendizaje y a la DdM; en pocos años se impuso con fuerte sustentamiento que nos sorprende a todos, tanto, que no es fácil reconstruir su historia (cosa que nosotros hicimos, incluso pidiendo ayuda al mismo creador: Radford, 1998, 2000a, b, 2001, 2003, 2006a, b; véase: D'Amore, & Radford, 2017).
Y así sucesivamente, podríamos continuar citando teorías que siguieron a la teoría de situaciones, con sus características innovadoras y funcionales, a veces sólo descriptivas, a veces operativas.
Ahora bien, la actitud que se encuentra en algunos centros de investigación y en algunos investigadores y docentes de DdM de opacar las primeras teorías en favor de las nuevas es, por decir poco, ridículo. Uno de los artículos de Radford, enviado para su publicación en 1998 salió sólo en el 2003 porque en aquel tiempo algunas revistas de didáctica rechazaban sin apelación los artículos que hablaban de semiótica. Debemos decir que, aún en 2005, uno de los autores de este artículo encontró cierta dificultad para publicar un artículo porque, según uno de los árbitros que lo leyó, "se cita demasiadas veces a Raymond Duval" (conservamos esta carta).[5]
Pero esto es lo que sucede siempre a los anticipadores; Guy Brousseau inició a elaborar su teoría, que después tuvo fama internacional, en los años '60 y, en los años '70, ya era madura; pero tuvo que esperar hasta 1986 para ver publicado su famoso artículo, tal vez el más citado en el mundo en nuestro sector (Brousseau, 1986).
El hecho es que en los años '60 y '70 las revistas de, digamos así, enseñanza de la matemática, rechazaban estos artículos considerados "bizarros y extraños" como eran calificados los escritos por Brousseau; ¡tan es así que tuvo que publicar un artículo sobre una *Revue de laryngologie, otologie, rinologie* (Brousseau, 1980)! En aquellos tiempos, los nombres que dictaban ley eran aquellos de Zoltan Dienes, Georges y Frédérique Papy, ... quienes, más que teorías, proponían sistemas de enseñanza a veces bizarros basados en sus propias intuiciones y sin bases científicas. Los estudios de Brousseau dedicados a demoler duramente estos enfoques de enseñanza de la matemática son bien conocidos y tuvieron un éxito evidente: ¿Quién recuerda hoy estos nombres? Sin una teoría científicamente basada en enfoques epistemológicos sensatos y bien fundamentados, estos episodios están condenados a desaparecer.
Pero las teorías sólidas, aquellas que dan resultados, aquellas que permiten entender la actitud de los estudiantes y de los docentes en las situaciones de aula, no son olvidadas. Es más, deben ser colocadas en la base, al inicio, de cualquier curso que pueda servir a quien de estas teorías debe hacer uso concreto en aula, los docentes, y a los futuros investigadores (estamos hablando, respectivamente, de cursos para docentes en formación inicial o en servicio, y de cursos de maestría y de doctorado). De lo contrario, un día, alguien creerá descubrir aquellas cosas, ignorando que ya habían sido estudiadas, dará a estos estudios un nombre nuevo, creyendo de estar proponiendo un avance en el estudio de la didáctica de la matemática. Lo cual sería bastante ridículo.
Sería como re-descubrir que existen fórmulas generales que usan sólo operaciones racionales y la extracción de raíz cuadrada para encontrar las raíces de las ecuaciones algebraicas generales de III grado con coeficientes enteros o racionales, con buena paz de Tartaglia (Tartamudo) y Cardan.

[4] En verdad, las cosas no son así totalmente; para un intento de consolidación entre estas dos teorías, véase: D'Amore (2003).

[5] El artículo salió de todas formas en 2006.

Relaciones del EOS con la Teoría de las Situaciones

El objetivo de continuar en la comparación y en la articulación de diferentes modelos teóricos, llevaron al EOS a formular algunas "nociones primitivas" con un alto grado de generalidad, como son "práctica matemática", "institución", "objeto matemático", "función semiótica" y las dualidades cognitivo-antropológico (persona-institución, elemental-sistémico, ostensivo-no ostensivo, extensiva-intensiva, expresión-contenido). Estos instrumentos ofrecen una plataforma unificada a partir de la cual es posible afrontar las ya recordadas tareas de comparación y de articulación de los marcos teóricos usados en DdM.

Muchas de las propuestas estrictamente didácticas desarrolladas en los años dentro del EOS son compatibles totalmente con las bases de la teoría de las situaciones como se ve explícitamente enunciado en Godino y Batanero (2016):

> La teoría de las situaciones didácticas formulada por Brousseau constituye, desde nuestro punto de vista, una teoría del aprendizaje organizado de la matemática, es decir, una teoría de la enseñanza de la matemática, en acuerdo con los presupuestos epistemológicos y psicológicos evidenciados en precedencia. Describe un ambiente de aprendizaje potente en el cual no sólo se presta atención al saber matemático puesto en juego en la propuesta de trabajo sino también a las actividades de comunicación en aula, todo esto en una secuencia ordenada de situaciones didácticas. (...) la teoría de las situaciones didácticas [y aquí se citan los trabajos de G. Brousseau] que nos sirve de referencia evidencia el papel de las situaciones de acción para hacer que los estudiantes den sentido a las nociones y a los procesos de la matemática.

Efectivamente, algunos de los presupuestos de base de las dos teorías son similares:

- la elección de situaciones de aprendizaje significativas preparadas por el docente;
- el papel del docente como un director (de teatro) de la actividad de los estudiantes implicados en situaciones a-didácticas;
- el papel importante del conocimiento matemático (el Saber) para poder proceder a la transposición didáctica;
- la importantísima fase de la institucionalización que, en la teoría de las situaciones, es aquella final en el uso de situaciones a-didácticas;
- etc.

En D'Amore, Font y Godino (2007) se muestra cómo, con instrumentos del EOS y de la sociología, es posible evidenciar cómo el fenómeno del contrato didáctico, introducido por la teoría de las situaciones de Guy Brousseau, puede tener explicaciones de carácter sociológico. De otra parte, estos aspectos habían sido puestos en evidencia en D'Amore (2005) y en Bagni y D'Amore (2005).

Como podemos ver la red constructiva entre teorías es decididamente fuerte y significativa.

Conclusiones

Como en toda ciencia consolidada, también en DdM existen desarrollos teóricos, procesos de desarrollo, arrestos momentáneos e ideas brillantes que permiten reflexiones críticas maduras.

Pensamos que el EOS es una de aquellas teorías que determinaron el nacimiento de formas nuevas de pensamiento y de reflexión en el panorama de la DdM en el mundo. Sin embargo, aún hoy, si se desea describirla y evidenciar sus bases filosóficas, se debe hacer referencia a teorías precedentes que indudablemente fueron las bases para esta innovadora creación. Nada nace de la nada y las "espaldas de los gigantes" que nos precedieron están siempre ahí, listas para fungir de apoyo a nuevos investigadores de poco legados al litoral del mar a contemplar su vastedad.

Nosotros somos partidarios de la necesidad, en los límites de lo posible (en realidad: más allá de estos límites), de estudiar siempre la posibilidad de la unificación de las teorías o por lo menos su correlación sistematizada; casi nunca nos ha sucedido de tener que aceptar una falta total de nexos o constituyentes comunes entre dos teorías, por muy distantes que aparezcan a simple vista (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020).

Referencias Bibliográficas

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 7-61.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica, 19*(1), 73-89.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford,L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En: M. F. Pinto M.F. y T. F. Kawasaki (Compiladores). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, 145-175. Bello Horizonte, Brasil: PME.

Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie, 101*(3-4), 107-131.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacios de Guy Brousseau y Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla].

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325-336.

D'Amore, B. (2007). Voces para el diccionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Compiladores) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto.* Turín: Bollati Boringhieri. Voces: Didattica disciplinare (72-75), Formazione in scienze naturali (140-142), Formazione in matematica (145-147), Scienza (335-337).

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, [Bellinzona, Suiza], *34*(66), 43-52.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Per una teoria delle didattiche disciplinari. Saggio per docenti e ricercatori*. Prefazione di Maura Iori. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma, 41*(1), 130-150. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/index

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión meta-didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Relime, 38*(2), 49-77.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica, 21*(1), 9-38.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime, 10*(2), 191-218.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dubinsky, E. (1991a). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Compilador.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991b). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En L. P. Steffe (Compilador.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, (pp. 160–202). New York: Springer-Verlag.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* [ULP, IREM Strasbourg], *5*(5), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(6), 139-163.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Londres: Falmer Press.

Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). Ontosemiotic approach of representation in mathematics education. *For the learning of mathematics, 27*(2), 2-7 y 14.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2016). Implicazioni delle relazioni fra epistemologia e insegnamento della matematica per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria. *La matematica e la sua didattica, 24*(1-2), 19-41.

Kutschera, F. Von (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Peirce, C. S. (1960). Collected papers of Charles Sanders Peirce (CP, Vol. I-VI). En C. Hartshorne & P. Weiss (Compiladores.). Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 38*(40), 165-178.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302.

Radford, L. (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. En: T. Nakahara y M. Koyama (Compiladores) (2000), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-24). Hiroshima University, Japón. 4, 81-88

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. En: Marja van den Hueuvel-Panhuizen (Compiladorea) (2001). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands. 4, 81-88.

Radford, L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, V. Cifarelli (Compiladores) (2003), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing.* Ottawa: Legas Publishing. 49-79.

Radford, L. (2006a). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*. L. Radford y B. D'Amore (Compiladores.), *Culture and Mathematical Thinking.* 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics.* L. Radford y B. D'Amore (Compiladores), *Culture and Mathematical Thinking*. 7-21.

Radford, L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Working paper.

Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education.* 40, 317–327.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. En: J. Vallès, D. Álvarez y R. Rickenmann (Compiladores) (2011), *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*]. Girona (Español): Documenta Universitaria. 33-49.

Tall, D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En: O. Zaslavsky (Compilador) (1991), *Proceedings of the 23rd Conference of PME, July 1999.* Haifa, Israel. 1, 111–118.

Ullmann, S. (1978). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Madrid: Aguilar. (I edición: 1962).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (*10*)2, 133-170.